ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8: Έστω $X_n$ ακολουθία τ.μ. με σ.π. $P_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x = 2 - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & , x = 2 + \frac{1}{n} \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$

Να βρεθεί η οριακή κατανομή της $X_n$.

ΛΥΣΗ:

$\lim_{n\to\infty} P_{X_n}(x) = 0 \quad \forall x$, γιατί $\lim_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$ και $P_{X_n}(2) = 0$

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & , x < 2 - 1/n \\ 1/2 & , 2 - 1/n \leq x < 2 + 1/n \\ 1 & , x \geq 2 + 1/n \end{cases} \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & , x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}$$

δηλ. $X_n \xrightarrow{d} X$ με $P(X=2)=1$
$P(X \neq 2) = 0$

$$E(X_n) = \left(2 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2} + \left(2 + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2} = 2$$

$$E(X_n^2) = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{n^2}$$

Άρα, $Var(X_n) = 4 + \frac{1}{n^2} - 2^2 = \frac{1}{n^2}$ και επειδή $\lim_{n\to\infty} Var(X_n) = 0 \rightsquigarrow$

$X_n \xrightarrow{P} \mu = 2 \rightarrow$

$X_n \xrightarrow{d} 2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9: Έστω $X_n$ ακολουθία τ.μ. με α.σ.κ. $F_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi/n}} e^{-\frac{nu^2}{2}} du$

δηλ. $X_n \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$

Να βρεθεί η οριακή κατανομή της $F_{X_n}(x)$.

ΛΥΣΗ:

Θέτουμε $v = \sqrt{n} \cdot u$. Έτσι, $F_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{\sqrt{n}\cdot x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$ και

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = 0 & , x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \frac{1}{2} & , x = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = 1 & , x > 0 \end{cases}$$

και θέτοντας $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$ είναι $X_n \xrightarrow{d} X (=0)$

$\left( E(X_n) = 0 \text{ και } Var(X_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ άρα } X_n \xrightarrow{P} 0 \text{ και } X_n \xrightarrow{d} 0 \right)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 : Έστω $X_n$ ακολουθία ομοιόμορφων $(0,1)$ τ.μ. ( με $f_X(x) = 1, 0<x<1$
(ΑΣΚ. Α.5.12(ii)) και $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ x & , 0<x<1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$ )

και $Y_n = \max_{1\leq i \leq n} X_i$ , $Z_n = n(1-Y_n)$.

Να βρεθεί η οριακή κατανομή της $Z_n$.

ΛΥΣΗ:

(α) ΤΡΟΠΟΣ:
$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & , y<0 \\ y^n & , 0<y<1 \\ 1 & , y \geq 1 \end{cases} \rightsquigarrow f_{Y_n}(y) = n y^{n-1}, 0<y<1$ και $Z = n(1-y)$

δηλ. $y = 1 - \frac{z}{n}$ με $0<z<n$ και $\left|\frac{dy}{dz}\right| = \frac{1}{n}$

Άρα, $f_{Z_n}(z) = n\left(1-\frac{z}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-1}, 0<z<n$ και

$$F_{Z_n}(z) = \int_0^z \left(1 - \frac{w}{n}\right)^{n-1} dw = \int_0^z -d\left(1 - \frac{w}{n}\right)^n = -\left(1 - \frac{w}{n}\right)^n \Big|_0^z$$

$$\rightsquigarrow F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n, & 0<z<n \\ 1 \end{cases}$$

Άρα, $\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = \left\{ \begin{matrix} 0 & , z<0 \\ 1 - e^{-z} & , z \geq 0 \end{matrix} \right\} = F_Z(z)$

(β) $F_{Z_n}(z) = P(Z_n \leq z) = P[n(1-Y_n) \leq z] = P[Y_n \geq 1 - z/n]$

$0<z<n$ $\quad = 1 - P\left(Y_n \leq 1 - \frac{z}{n}\right) = 1 - F_{Y_n}\left(1 - \frac{z}{n}\right)$

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & , z<0 \\ 1-\left(1-\frac{z}{n}\right)^n & , 0<z<n \rightsquigarrow \cdots \\ 1 & , z\geq n \end{cases}$$

ερώτημα (i): $Y_n \xrightarrow{P} 1$ (ν.δ.ο).

(α) $E(Y_n) = \int_0^1 y\, n y^{n-1}\, dy = \cdots = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$

$Var(Y_n) = EY_n^2 - [EY_n]^2 = \frac{n}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ από Θεωρ. $Y_n \xrightarrow{P} 1$

(β) $F_{Y_n}(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(y) = \begin{cases} 0 & , y<1 \\ 1 & , y\geq 1 \end{cases} \rightsquigarrow Y_n \xrightarrow{d} Y (=1)$

Έτσι και $Y_n \xrightarrow{P} 1$.

(γ) $P\{|Y_n - 1| > \varepsilon\} = 1 - P\{|Y_n - 1| \leq \varepsilon\} = 1 - P\{1-\varepsilon \leq Y_n \leq 1+\varepsilon\} =$

$= 1 - \{F_{Y_n}(1+\varepsilon) - F_{Y_n}(1-\varepsilon)\} =$

$= 1 - \{1 - (1-\varepsilon)^n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - 1 + 0 = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

4) Σύγκλιση κατά μέσο τετράγωνο.

Έστω $X_n$ ακολουθία τ.μ. και $X$ άλλη τ.μ.. Αν $E(X_n - X)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ τότε λέμε ότι η $X_n$ συγκλίνει κατά μέσο τετράγωνο προς την τ.μ. $X$.

Συμβολίζουμε με $X_n \xrightarrow{\mu.\tau} X$ ή $X_n \xrightarrow{q.m.} X$

Σχέσεις μεταξύ διαφόρων ειδών σύγκλισης.

Σύγκλιση $P=1$ $\searrow$

Σύγκλιση μ.τ $\longrightarrow$ Σύγκλιση $p$ $\rightarrow$ Σύγκλιση $d$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6:

i) $X_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} c$

ii) $X_n \xrightarrow{d} X$, $c \neq 0$, $cX_n \xrightarrow{d} cX$ και $c + X_n \xrightarrow{d} c + X$

iii) $X_n \xrightarrow{d} X$ και $Y_n \xrightarrow{P} c \Rightarrow X_n \pm Y_n \xrightarrow{d} X \pm c$

$$X_n \cdot Y_n \xrightarrow{d} c \cdot X$$

$$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{c}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

i) $F_{X_n}(x) \longrightarrow F_c(x) = 0, \quad x < c$

$\qquad\qquad\qquad\quad = 1, \quad x \geq c.$

$$P\{|X_n - c| \leq \varepsilon\} = P\{c - \varepsilon \leq X_n \leq c + \varepsilon\} = F_{X_n}(c+\varepsilon) - F_{X_n}(c-\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$\left(\text{ή } P\{|X_n - c| > \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$. Άρα, $X_n \xrightarrow{P} c$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11: (Προσέγγιση της $t_n$ από $N(0,1)$).

Εάν $X_n$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων $N(\mu, \sigma^2)$ τ.μ.

ν.δ.ο. $T_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$. $\quad \left\| t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \right\|$

όπου $S_n$ και $\bar{X}_n$ οι ακολουθίες των δειγματικών τυπικών αποκλίσεων και μέσων τιμών.

ΛΥΣΗ:

$$T_n = \frac{\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \Big/ (n-1)}} = \frac{Z_n}{Y_n} \left( = t_{n-1} \xrightarrow{d} N(0,1) \right)$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow Z_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

$$E[S_n^2] = \sigma^2 \text{ και } Var[S_n^2] = \frac{1}{n}\left[E(X-\mu)^4 - \frac{n-3}{n-1} \cdot \sigma^4\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Εναλλακτικά: $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \Rightarrow Var\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1) \Rightarrow$

$$\frac{(n-1)^2}{\sigma^4} Var(S_n^2) = 2(n-1) \Rightarrow Var(S_n^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Άρα, $S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 \rightsquigarrow \frac{S_n^2}{\sigma^2} \xrightarrow{P} 1$ και $\sqrt{\frac{S_n^2}{\sigma^2}} \xrightarrow{P} 1$ (Θεωρ. 5-c $X_n \xrightarrow{P} X$ τότε $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$)

Άρα, $Y_n \xrightarrow{P} 1$ και έτσι $\frac{Z_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{Z}{1} = Z \sim N(0,1)$ (από (iii) Θεωρ. 6)

Οριακά Θεωρήματα | Νόμοι μεγάλων αριθμών : Συγκλίσεις κατά πιθανότητα
| Κεντρικά Οριακά Θεωρήματα : Συγκλίσεις κατά κατανομή

**ΘΕΩΡΗΜΑ 7** (Ασθενής νόμος μεγάλων αριθμών): Εάν η $X_n$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με $E(X_i)=\mu$, $Var(X_i)=\sigma^2$, $\mu, \sigma^2 < \infty$ και $\overline{X}_n = \frac{\sum^n X_i}{n}$ τότε $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $E(\overline{X}_n)=\mu$, $Var(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, άρα $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 8** (Κεντρικό οριακό θεώρημα)(L-L): Εάν η $X_n$ είναι ακολουθία ανεξ. και ισόνομων τ.μ. με $E(X_i)=\mu$, $Var(X_i)=\sigma^2$, $\mu, \sigma^2 < \infty$ τότε $Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $Z_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}$ || $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots$

$$m_{Z_n}(t) = m_{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}}(t) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \prod_{i=1}^n m_{\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(t) \underset{\text{με τ.μ. } X}{\overset{\text{ισόνομες}}{=}} \left[m_{\frac{X-\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(t)\right]^n = \left[E\left(e^{\frac{X-\mu}{\sigma\sqrt{n}}t}\right)\right]^n =$$

$$= \left[E\left[1 + t\frac{X-\mu}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{t^2 (X-\mu)^2}{2!\sigma^2 n} + \frac{t^3 (X-\mu)^3}{3!\sigma^3 n^{3/2}} + \dots\right]\right]^n =$$

$$= \left\{1 + t\frac{\cancelto{0}{E(X-\mu)}}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{\frac{t^2}{2!}\cancelto{\sigma^2}{E(X-\mu)^2}}{\cancel{\sigma^2}\sqrt{n}^2} + \frac{\frac{t^3}{3!}E(X-\mu)^3}{\sigma^3 n^{3/2}} + \dots\right\}^n =$$

$$= \left[1 + \frac{t^2}{2!n} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{t^k}{k!\sigma^k n^{k/2}} E(X-\mu)^k\right]^n =$$

$$= \left[1 + \frac{t^2}{2!n} + \frac{1}{n}\overbrace{\sum_{k=3}^{\infty} \frac{t^k}{k!\sigma^k n^{\frac{k}{2}-1}} E(X-\mu)^k}^{A_n}\right]^n =$$

$$= \left[1 + \frac{t^2}{2!n} + \frac{1}{n} A_n\right]^n = \left[1 + \frac{\frac{t^2}{2!} + A_n}{n}\right]^n \text{ και } \lim_{n\to\infty} m_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{t^2}{2} + A_n} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{t^2}{2} + A_n\right)} = e^{t^2/2}$$

$$\left(\text{γιατί } \lim_{n\to\infty} A_n = 0\right)$$

$$\boxed{m_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot t^2} \equiv m_X(t), \ X \sim N(0,1)}$$

$$\boxed{Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \overset{\kappa.o.\theta}{\sim} N(0,1) \text{ για } Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12: (Ιδίως η πρώτη εκδοχή κ.ο.θ. από τους De Moirre & Laplace για την προσέγγιση της διωνυμικής από την $N(0,1)$).
Έστω $X_n$ η ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων Bernoulli τ.μ. με παράμετρο $P$ και $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Δείξτε ότι $\frac{X - nP}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

ΛΥΣΗ: $X_i \sim Ber(P)$ στο $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n,P)$

$E(X_i) = P$, $Var(X_i) = P \cdot q$

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \overset{\kappa.o.\theta.}{\sim} N(0,1)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13: Να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{x=0}^{n} \frac{n^x}{x!} = \frac{1}{2}$.

Έστω $X_i$ ανεξ. τ.μ. με κατανομή $Pois(\lambda) \Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Pois(\lambda = n) \overset{\kappa.o.\theta}{\sim} N(n,n)$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{x=0}^{n} \frac{n^x}{x!} = \lim_{n\to\infty} P(X \le n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X-n}{\sqrt{n}} \le 0\right) = \frac{1}{2} \text{ (από } N(0,1)).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14: $X_n \equiv G(a = n, \theta)$, $\theta$ = σταθ. Να βρεθεί $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{d} X$.
(ΑΣΚ 5.9)

ΛΥΣΗ:

(α) τρόπος: $m_{X_n}(t) = (1 - \theta t)^{-n} \rightarrow m_{\frac{X_n}{n}}(t) = m_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(1 - \theta\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta t}{n}\right)^n}$

και $\lim_{n\to\infty} m_{\frac{X_n}{n}}(t) = \frac{1}{e^{-\beta t}} = e^{\beta t} \Rightarrow \frac{X_n}{n} \xrightarrow{d} X$ με $P(X=\beta)=1$
$P(X\neq\beta)=0.$

$m_X(t) = E(e^{tX}) = e^{t\beta}$

(β) τρόπος: $E(X_n) = \beta\cdot n$ και $E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \beta\cdot\left(\frac{n}{n}\right) = \beta$

$$\boxed{\begin{array}{l} X\sim G(a,\beta) \\ E(X)=a\beta \\ Var(X)=a\beta^2 \end{array}}$$

$Var(X_n) = n\cdot\beta^2 \to Var\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{n\beta^2}{n^2} = \frac{\beta^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} \beta$ ή

$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{d} \beta$